با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۱) پایه دهم
فصل اول

عنوان فصل: مجموعه، الگو و دنباله

از صفحه‌ی ۱ تا صفحه‌ی ۲۷ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل مجموعه، الگو و دنباله آمده است.

مباحث فصل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، متمم یک مجموعه، الگو و دنباله، دنباله‌های حسابی و هندسی

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۲ · کار در کلاس — مجموعه‌های اعداد و محور اعداد حقیقی ۶

۲ صفحه ۳ · فعالیت — بازه‌ها ۷

۳ صفحه ۳ · فعالیت — جدول انواع بازه‌ها ۷

۴ صفحه ۳ · فعالیت — جای اعداد گنگ روی محور ۸

۵ صفحه ۴ · فعالیت — بازه‌های بی‌پایان ۸

۶ صفحه ۴ · فعالیت — جدول بازه‌های بی‌پایان ۹

۷ صفحه ۴ · مثال — اجتماع و اشتراک بازه‌ها ۱۰

۸ صفحه ۵ · کار در کلاس — درستی یا نادرستی (عضویت و زیرمجموعه) ۱۰

۹ صفحه ۵ · کار در کلاس — وصل کردن اعداد به بازه‌ها ۱۱

۱۰ صفحه ۵ · کار در کلاس — عملیات روی بازه‌ها ۱۲

۱۱ صفحه ۵ · فعالیت — مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۲

۱۲ صفحه ۶ · کار در کلاس — متناهی یا نامتناهی؟ ۱۳

۱۳ صفحه ۶ · کار در کلاس — دو مجموعهٔ متناهی ۱۳

۱۴ صفحه ۶ · کار در کلاس — دو مجموعهٔ نامتناهی با رابطهٔ زیرمجموعه ۱۴

۱۵ صفحه ۶ · کار در کلاس — تفاضل تک‌عضوی دو مجموعهٔ نامتناهی ۱۴

۱۶ صفحه ۶ · فکر کنید — درخت‌های جنگل آمازون ۱۴

۱۷ صفحه ۷ · فکر کنید — عدد آووگادرو ۱۴

۱۸ صفحه ۷ · فعالیت — اعداد گویا در بازهٔ (۰,۱) ۱۵

۱۹ صفحه ۷ · تمرین — مضرب‌های طبیعی عدد ۵ ۱۵

۲۰ صفحه ۷ · تمرین — تشخیص متناهی و نامتناهی ۱۶

۲۱ صفحه ۷ · تمرین — اشتراک متناهی دو مجموعهٔ نامتناهی ۱۶

۲۲ صفحه ۷ · تمرین — اجتماع و اشتراک بازه‌ها روی محور ۱۶

۲۳ صفحه ۷ · تمرین — R منهای یک نقطه ۱۷

۲۴ صفحه ۷ · تمرین — زیرمجموعهٔ مجموعهٔ متناهی ۱۸

۲۵ صفحه ۸ · فعالیت — متمم یک مجموعه ۱۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۰۹ · کار در کلاس — متمم؛ استان‌های غیرساحلی ۱۹
۲۷ صفحه ۰۹ · کار در کلاس — متمم؛ پلاک اتومبیل ۱۹
۲۸ صفحه ۰۹ · کار در کلاس — وصل کردن مجموعه به متمم (مرجع N) ۱۹
۲۹ صفحه ۰۹ · کار در کلاس — ویژگی‌های متمم ۲۰
۳۰ صفحه ۰۹ · کار در کلاس — متمم N در Z و در R ۲۰
۳۱ صفحه ۰۹ · کار در کلاس — قوانین دمورگان (جدول) ۲۰
۳۲ صفحه ۱۰ · کار در کلاس — متمم و رابطهٔ زیرمجموعه بودن ۲۱
۳۳ صفحه ۱۰ · فعالیت — تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ مجزا ۲۱
۳۴ صفحه ۱۱ · فعالیت — فرمول n(A ∪ B) ۲۲
۳۵ صفحه ۱۱ · کار در کلاس — جشنوارهٔ فیلم کوتاه ۲۳
۳۶ صفحه ۱۲ · کار در کلاس — تیم فوتبال و بسکتبال ۲۳
۳۷ صفحه ۱۲ · تمرین — متمم بازه‌ها ۲۴
۳۸ صفحه ۱۲ · تمرین — متمم در N ۲۵
۳۹ صفحه ۱۳ · تمرین — محاسبهٔ n(B) ۲۵
۴۰ صفحه ۱۳ · تمرین — زیرمجموعه‌های U با n(U) = ۱۰۰ ۲۵
۴۱ صفحه ۱۳ · تمرین — گروه سرود و تئاتر ۲۵
۴۲ صفحه ۱۳ · تمرین — نظرسنجی از مشتریان فروشگاه ۲۶
۴۳ صفحه ۱۴ · مثال — الگوی چوب‌کبریت و نمادگذاری اندیس‌دار ۲۶
۴۴ صفحه ۱۵ · فعالیت — جملهٔ عمومی الگوی چوب‌کبریت ۲۷
۴۵ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — الگوی مربع‌های رنگی ۲۷
۴۶ صفحه ۱۷ · فعالیت — الگوی غیرخطی نقطه‌ها (۱ و ۲) ۲۸
۴۷ صفحه ۱۸ · فعالیت — الگوی غیرخطی نقطه‌ها (۳ تا ۶) ۲۹
۴۸ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — مثال‌هایی از دنباله ۲۹
۴۹ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — یافتن جمله‌ها از جملهٔ عمومی ۲۹
۵۰ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — سه جملهٔ بعدی و حدس جملهٔ عمومی ۳۰
۵۱ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — الگوی مربع‌ها؛ دنبالهٔ اعداد مثلثی ۳۱
۵۲ صفحه ۲۰ · تمرین — الگوی کاشی سفید و تیره ۳۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۳ صفحه ۲۰ · تمرین — الگوی نقطه‌ها (۱، ۶، ۱۵، ...) ۳۲

۵۴ صفحه ۲۰ · تمرین — نظیر کردن الگوی هندسی به جملهٔ عمومی ۳۲

۵۵ صفحه ۲۰ · تمرین — جملهٔ عمومی دنباله‌های درجه ۲ ۳۳

۵۶ صفحه ۲۱ · فعالیت — سال‌های برگزاری المپیک ۳۳

۵۷ صفحه ۲۲ · کار در کلاس — جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی ۳۴

۵۸ صفحه ۲۲ · کار در کلاس — مقایسهٔ تعرفهٔ دو سیم‌کارت ۳۴

۵۹ صفحه ۲۳ · مثال — جملهٔ شانزدهم دنبالهٔ حسابی ۳۵

۶۰ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — مثال زدن دنبالهٔ حسابی ۳۵

۶۱ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — واسطه‌های حسابی ۳۶

۶۲ صفحه ۲۴ · تمرین — تشخیص دنبالهٔ حسابی و جملهٔ بیست‌ویکم ۳۶

۶۳ صفحه ۲۴ · تمرین — تعیین دنبالهٔ حسابی از دو جمله ۳۷

۶۴ صفحه ۲۴ · تمرین — سه جملهٔ بعدی با مجموع معلوم ۳۷

۶۵ صفحه ۲۴ · تمرین — الگوی ۱, ۵, ۹ ۳۷

۶۶ صفحه ۲۴ · تمرین — واسطهٔ حسابی ۳۸

۶۷ صفحه ۲۴ · تمرین — مسئلهٔ پاپیروس رایند ۳۸

۶۸ صفحه ۲۵ · فعالیت — انتشار ویروس آنفلوانزا ۳۸

۶۹ صفحه ۲۵ · فعالیت — جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی ۳۹

۷۰ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — روش نرگس و نگار ۳۹

۷۱ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی ۴۰

۷۲ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — واسطهٔ هندسی ۴۰

۷۳ صفحه ۲۷ · تمرین — تشخیص دنبالهٔ هندسی ۴۱

۷۴ صفحه ۲۷ · تمرین — ساختن دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۵/۴ ۴۱

۷۵ صفحه ۲۷ · تمرین — درست یا نادرست دربارهٔ دنباله‌ها ۴۱

۷۶ صفحه ۲۷ · تمرین — قیمت دوچرخه ۴۲

۷۷ صفحه ۲۷ · تمرین — حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول ۴۲

۷۸ صفحه ۲۷ · تمرین — تعیین دنبالهٔ هندسی از دو جمله ۴۲

۷۹ صفحه ۲۷ · تمرین — آمار تلفات جاده‌ای ۴۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۲ کار در کلاس

۱ الف) مجموعهٔ Q – R چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آن‌ها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید. ۲۰۰ ، ۰ ، ۱۷/۲۳- ، ۲۵√- ، π ، ... (فهرست اعداد کتاب)

ت) مجموعهٔ اعداد صحیح غیرحسابی را با نمایش اعضا بنویسید. Z – W = { ... }

ث) مجموعهٔ W – N چند عضو دارد؟

در شکل کتاب، مجموعه‌ها به‌صورت تودرتو کشیده شده‌اند: N درون W، W درون Z، Z درون Q و Q درون R.

الف) مجموعهٔ R – Q (اعداد حقیقی که گویا نیستند) «مجموعهٔ اعداد گنگ» نام دارد و آن را با Q′ نشان می‌دهند؛ ناحیهٔ بیرون از Q و درون R هاشور زده می‌شود. دو عضو دلخواه: $\sqrt{۲}$ و π.

ب) مثلاً $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{-۳}{۴}$ (یا ۲/۵ و ۰/۷۵-)؛ این‌ها گویا هستند ولی صحیح نیستند، پس باید در ناحیهٔ داخل Q و بیرون Z نوشته شوند.

پ) جای هر عدد:

- π ← عددی گنگ است؛ در ناحیهٔ Q′ (درون R و بیرون Q).
- ۲۵√- = ۵- ← عدد صحیح منفی است؛ در ناحیهٔ Z بیرون W.
- ۱۷/۲۳- ← گویای غیرصحیح؛ در ناحیهٔ Q بیرون Z.
- ۰ ← عدد حسابی است؛ در ناحیهٔ W بیرون N.
- ۲۰۰ ← عدد طبیعی؛ در ناحیهٔ N.
- برای هر عدد دیگر فهرست کتاب همین قاعده را به‌کار ببرید: طبیعی ← N؛ ۰ ← W؛ صحیح منفی ← Z؛ کسر یا اعشاری مختوم/متناوب ← Q؛ رادیکال‌های غیرکامل و π ← Q′.

ت) $Z - W = \{..., -3, -2, -1\}$ (صحیح‌های منفی).

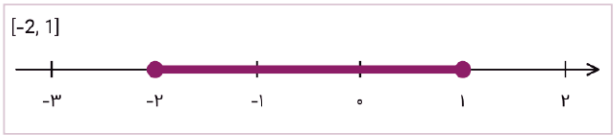
ث) $W - N = \{0\}$ ← فقط یک عضو دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۲ صفحه ۳ فعالیت

فرض کنید A مجموعهٔ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۱ به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از ۲- را مشخص کرد؟



پاره‌خط بین ۲- و ۱ را (با دو سر آن) پررنگ می‌کنیم؛ همهٔ اعداد حقیقی این پاره‌خط عضو A هستند.

خیر، نمی‌توان اعضای A را فهرست کرد؛ زیرا بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد حقیقی دیگر وجود دارد و A نامتناهی است.

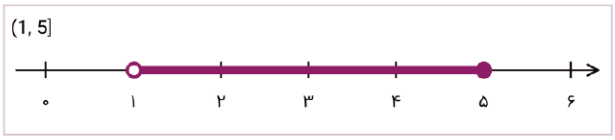
خیر، «اولین عدد حقیقی بعد از ۲-» وجود ندارد: اگر عددی مثل c را بعد از ۲- در نظر بگیریم، میانگین ۲- و c یعنی $\frac{-2+c}{2}$ عددی است که از c کوچک‌تر و از ۲- بزرگ‌تر است.

۳ صفحه ۳ فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که $a < b$، آنگاه جدول زیر را کامل کنید: نوع بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش بازه‌ای | نمایش هندسی (بازهٔ باز، بسته، نیم‌باز، نیم‌باز، $\{x \in R \mid 1 < x \leq 5\}$).

نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نمایش هندسی
باز	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	(a, b)	a و b هر دو شامل نیستند؛ دو دایرهٔ توخالی در دو سر پاره‌خط
بسته	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	هر دو سر شامل‌اند؛ دو دایرهٔ توپر
نیم‌باز	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	a توخالی، b توپر
نیم‌باز	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	a توپر، b توخالی
نیم‌باز	$\{x \in R \mid 1 < x \leq 5\}$	$(1, 5]$	۱ توخالی، ۵ توپر

در نمایش هندسی، سر «شامل» با دایرهٔ توپر و سر «غیرشامل» با دایرهٔ توخالی نشان داده می‌شود. مثلاً بازهٔ آخر:



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴ صفحه ۳ فعالیت

۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص‌شده روی محور بنویسید. کدام‌یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آن‌ها خط بکشید. ۲/۴۵ ، -۷/۲ ، $\sqrt{۶}$ ، -۴/۹ ، $-\sqrt{۲}$ ، π

ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

عدد	مقدار تقریبی	گویا یا گنگ
-۴/۹	-۴/۹	گویا
-۷/۲	-۳/۵	گویا
$-\sqrt{۲}$	$\approx$ -۱/۴۱۴	**گنگ**
$\sqrt{۶}$	$\approx$ ۲/۴۴۹	**گنگ**
۲/۴۵	۲/۴۵	گویا
π	$\approx$ ۳/۱۴۲	**گنگ**



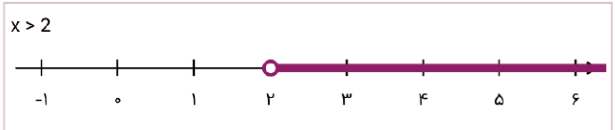
ترتیب روی محور: $-4.9 < -3.5 < -\sqrt{2} < \sqrt{6} < 2.45 < \pi$. توجه کنید که $\sqrt{۶} \approx ۲/۴۴۹$ کمی از ۲/۴۵ کوچک‌تر است.

اعداد گنگ: $\sqrt{۶}$ ، π و $-\sqrt{۲}$ (رادیکال عددهایی که مربع کامل نیستند و π). بقیه کسر یا اعشاری مختومند و گویا هستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵ صفحه ۴ فعالیت

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به‌عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x > ۲$ به‌صورت $C = \{x \in R \mid x > ۲\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید. آیا می‌توانید C را به‌صورت یک بازه بنویسید؟



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

از ۲ (با دایرهٔ توخالی) به سمت راست تا بی‌نهایت پررنگ می‌کنیم. بله، $C = (2, +\infty)$ یک بازهٔ باز است؛ $+\infty$ عدد حقیقی نیست، پس همیشه کنار آن پرانتز می‌گذاریم.

۶ صفحه ۴ **فعالیت**

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید. (نوع بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش بازه‌ای | نمایش هندسی؛ ردیف‌ها: $x > 5$ ، R ، $(-\infty, a]$ ، $[a, +\infty)$ ، $x < a$)

نمایش مجموعه‌ای	نمایش بازه‌ای	نوع بازه	نمایش هندسی
$\{x \in R \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز	از a به سمت چپ، a توخالی
$\{x \in R \mid x \le a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز	از a به سمت چپ، a توپر
$\{x \in R \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز	از a به سمت راست، a توخالی
$\{x \in R \mid x \ge a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز	از a به سمت راست، a توپر
R	$(-\infty, +\infty)$	باز	کل محور
$\{x \in R \mid x > 5\}$	$(5, +\infty)$	باز	از ۵ به سمت راست، ۵ توخالی

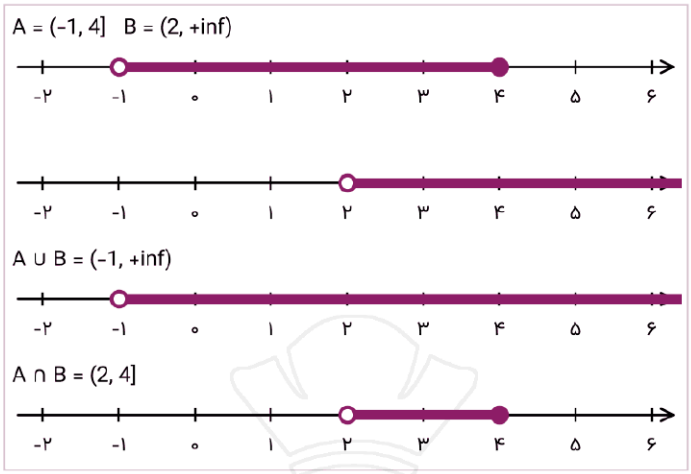


این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ صفحه ۴ مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازهٔ A = (−۱, ۴] و B = (۲, +∞) را به‌دست آوریم ... توضیح دهید که چرا ۲ ∉ A ∩ B.



از روی شکل: $A \cup B = (-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$ و $A \cap B = (2, 4]$.

چرا ۲ ∉ A ∩ B؟ چون ۲ عضو A هست ولی عضو B نیست (B شامل اعداد **بزرگ‌تر از ۲** است و سر ۲ در آن توخالی است). عضو اشتراک باید عضو هر دو مجموعه باشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸ صفحه ۵ کار در کلاس

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) ۴/۳ ∈ [۱/۲ , ۲) ب) −۲ ∈ [−۲, ۰) پ) ۰ ∈ [−۲, ۰) ت) −۲ ∈ {−۲, ۰} ث) −۱ ∈ {−۲, ۰}

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) $[-1, 2] \supseteq (-1, 2)$ چ) $\{1, 0\} \supseteq [-1, 2)$ ح) $\varnothing \supseteq [-17, 0)$ خ) $(2, 5) = [2, 5)$ د) $\sqrt{2} \ni (1, 0)$

مورد	پاسخ	دلیل
الف	درست	$1/2 \geq 4/3 > 2$ $(1/33 \approx 4/3)$
ب	درست	-2 سر چپ بازه است و بازه از سمت چپ بسته است
پ	نادرست	0 سر راست بازه است و بازه از راست باز است
ت	درست	-2 یکی از دو عضو مجموعهٔ $\{-2, 0\}$ است
ث	نادرست	-1 عضو $\{-2, 0\}$ نیست
ج	نادرست	-1 در $[-1, 2]$ هست ولی در $(-1, 2)$ نیست
چ	درست	0 و 1 هر دو بین -1 و 2 هستند
ح	درست	تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است
خ	نادرست	$2 \notin (2, 5]$ ولی $2 \in [2, 5)$؛ 5 هم برعکس
د	نادرست	$\sqrt{2} \approx 1/41$ و از 1 بزرگ‌تر است

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹ صفحه ۵ کار در کلاس

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده‌شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید. اعداد: -2 ، 3 ، -500 ، -5 ، 4 ، $6/022 \times 10^{23}$ ، $0/2$ بازه‌ها: $[1, 4]$ ، $(-\infty, -4)$ ، $[-2, 0)$ ، $[3, +\infty)$ ، $(-1/2, 1/2]$ ، $(-2, 3]$

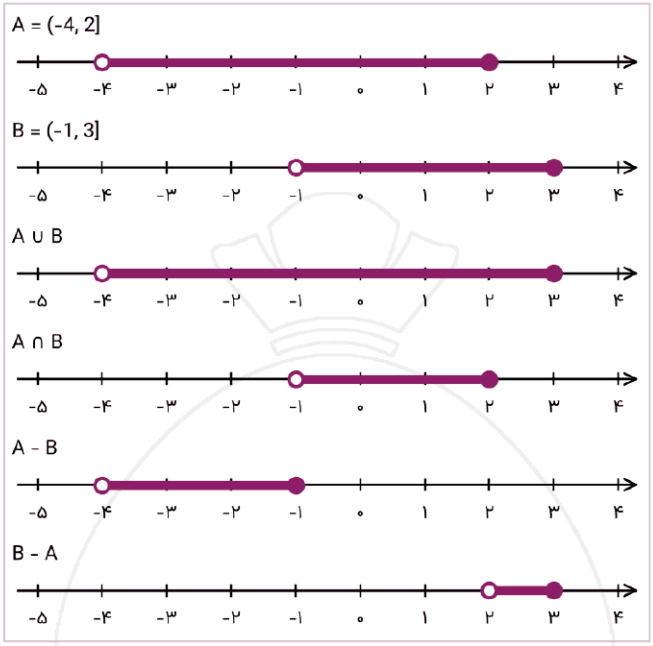
بازه	اعداد عضو آن
$[1, 4]$	۳ و ۴
$(-\infty, -4)$	-500 و -5
$[-2, 0)$	-2
$[3, +\infty)$	۳ و ۴ و $6/022 \times 10^{23}$
$(-1/2, 1/2]$	$0/2$
$(-2, 3]$	۳ و $0/2$

پس هر عدد دست‌کم به یک بازه وصل می‌شود: ۳ و ۴ و $0/2$ به بیش از یک بازه وصل می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۵ کار در کلاس

۳ نمایش هندسی دو بازهٔ A = (−۴, ۲] و B = (−۱, ۳] را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. الف) A ∪ B ب) A ∩ B پ) A − B ت) B − A



- **الف)** $A \cup B = (-4, 3]$
- **ب)** $A \cap B = (-1, 2]$
- **پ)** $A - B = (-4, -1]$ (اعضای A که در B نیستند؛ سر −۱ چون در B نیست، به A − B تعلق دارد)
- **ت)** $B - A = (2, 3]$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱ صفحه ۵ فعالیت

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آن‌ها مشخص کنید. A = { } ، B = { }

ب) A چند عضو دارد؟

پ) دربارهٔ تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

الف) $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

ب) A سه عضو دارد: $n(A) = ۳$.

پ) B از سمت چپ پایان ندارد؛ تعداد اعضای آن را نمی‌توان با هیچ عدد حسابی بیان کرد (از هر عددی که در نظر بگیریم بیشتر است). پس B مجموعه‌ای **نامتناهی** است و A متناهی است.

۱۲ صفحه ۶ **کار در کلاس**

۱ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آن‌ها را بنویسید. (جدول: مجموعه | متناهی | نامتناهی | تعداد اعضا)

مجموعه	نوع	تعداد اعضا (متناهی)
اعداد اول یک‌رقمی	متناهی	۴ عضو: {۲, ۳, ۵, ۷}
انسان‌های روی زمین	متناهی	حدود ۸ میلیارد نفر
اعداد طبیعی فرد	نامتناهی	—
سلول‌های عصبی مغز یک انسان	متناهی	حدود ۸۶ میلیارد (از مرتبهٔ 10^{11})
تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	نامتناهی	—
دانش‌آموزان مدرسهٔ شما	متناهی	مثلاً حدود ۳۰۰ نفر (بسته به مدرسه)
اعداد طبیعی ده‌رقمی	متناهی	$9 \times 10^9 = 9000000000$ (از 10^9 تا ۹۹۹۹۹۹۹۹۹)
درخت‌های جنگل‌های آمازون	متناهی	حدود ۳۹۰ میلیارد اصله
کسرهای مثبت با صورت یک	نامتناهی	{۱/۱, ۱/۲, ۱/۳, ...} —
مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	نامتناهی	—
بازهٔ (۰, ۱)	نامتناهی	—
مولکول‌های یک مول مشخص از آب	متناهی	حدود $6/022 \times 10^{23}$

برای مجموعه‌های متناهی عددهای تقریبی‌اند و ممکن است در منابع کمی متفاوت باشند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۶ **کار در کلاس**

۲ دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید.

مثلاً: مجموعهٔ روزهای هفته (۷ عضو) و مجموعهٔ استان‌های ایران (۳۱ عضو). همچنین {۱, ۲, ۳} و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲.

۱۴ صفحه ۶ کار در کلاس

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

مثلاً N (اعداد طبیعی) و Z (اعداد صحیح): هر دو نامتناهی‌اند و $N \subseteq Z$. یا مضرب‌های طبیعی عدد ۴ که زیرمجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۲ است.

۱۵ صفحه ۶ کار در کلاس

۴ دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک‌عضوی باشد.

اگر $B = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ و $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$ (اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱)، آنگاه هر دو نامتناهی‌اند، $A \subseteq B$ و $B - A = \{1\}$ فقط یک عضو دارد.

نمونهٔ دیگر: $B = (0, 1]$ و $A = (0, 1)$ که $B - A = \{1\}$.

۱۶ صفحه ۶ فکر کنید

با این‌حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعهٔ متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟

تعداد درخت‌ها حدود ۳۹۰ میلیارد و جمعیت جهان حدود ۸ میلیارد نفر است؛ پس سهم هر نفر حدود $\frac{۳۹۰ \times ۱۰^۹}{۸ \times ۱۰^۹} \approx ۴۹$ درخت است.

با وجود این عدد بسیار بزرگ، تعداد درخت‌ها یک عدد (حسابی) معین است؛ پس این مجموعه **متناهی** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۷ فکر کنید

به نظر شما، مجموعهٔ مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعهٔ متناهی است یا نامتناهی؟

متناهی است؛ زیرا تعداد مولکول‌ها با عددی مشخص (حدود ۶/۰۲۲ × ۲۳^۱۰) بیان می‌شود. هرچند این عدد بسیار بزرگ است، یک عدد حسابی است و در صورت داشتن امکانات و زمان کافی، شمردنی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۷ فعالیت

۱ الف) عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ (۰,۱) بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. (عدد مثال: ۱/۳)

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (۰,۱) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

ث) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعهٔ ..... خواهد بود.

الف) مثلاً $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۳}{۴}$ (یا ۰/۱ ، ۰/۲۵ ، $\frac{۱}{۱۰}$ ، $\frac{۹}{۱۰}$).

ب) بله؛ مثلاً کسرهای $\frac{۱}{n}$ برای $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$ همگی بین ۰ و ۱ هستند و هرگز تمام نمی‌شوند. همچنین بین هر دو عدد گویا، میانگین آن‌ها گویاست.

پ) اعداد گویای بازهٔ (۰,۱) **نامتناهی**اند.

ت) چون مجموعهٔ گویاهای (۰,۱) نامتناهی و زیرمجموعهٔ Q است، Q هم **نامتناهی** است.

ث) نامتناهی (اگر A متناهی بود، هر زیرمجموعهٔ آن هم متناهی می‌شد).

۱۹ صفحه ۷ تمرین

۱ فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به‌طوری که $C \subseteq D$.

الف) $U = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$

ب) نامتناهی (بزرگ‌ترین مضرب ندارد).

پ) مثلاً {5, 10, 15} یا {5, 25}.

ت) مثلاً $C = \{10, 20, 30, \ldots\}$ (مضرب‌های طبیعی ۱۰) و $D = \{20, 40, 60, \ldots\}$ (مضرب‌های طبیعی ۲۰)؛ هر دو نامتناهی‌اند، هر دو زیرمجموعهٔ U هستند و $C \subseteq D$. (نمونهٔ دیگر: $C = U$ و D = مضرب‌های طبیعی ۱۰.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

irantooshe.ir

۲۰ صفحه ۷ تمرین

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی. ب) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. پ) بازهٔ (۱/۴ , ۱۲).

ت) $A = \{x \in N \mid 1 < x < 2\}$ ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰.

الف) نامتناهی.

ب) متناهی: {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶} با ۹ عضو.

پ) نامتناهی (هر بازهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی بی‌شمار عضو دارد).

ت) هیچ عدد طبیعی بین ۱ و ۲ نیست؛ پس $A = \emptyset$ و متناهی است (۰ عضو).

ث) نامتناهی: {۱۰۰, ۲۰۰, ۳۰۰, ...}.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۷ تمرین

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد: هر دو نامتناهی‌اند و اشتراکشان $\emptyset$ است (متناهی).

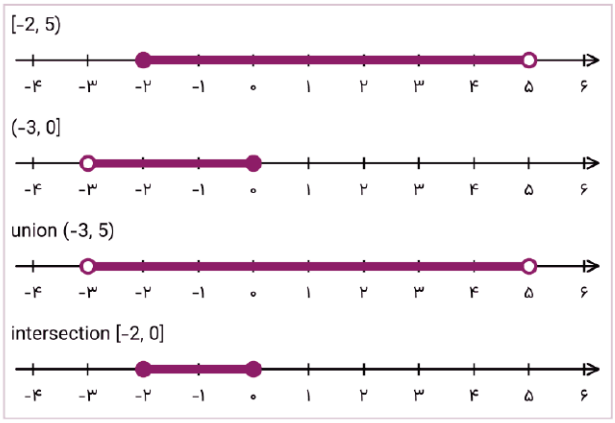
مثالی با اشتراک غیرتهی: $A = (-\infty, 3]$ و $B = [3, +\infty)$ که $A \cap B = \{3\}$.

۲۲ صفحه ۷ تمرین

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید:

الف) [−۲, ۵) و (−۳, ۰] ب) (۲, ۹) و (−∞, ۶] پ) (۳, +∞) و (۶, ۱۰] ت) (−∞, ۱) و [۱, +∞) ث) و ج) (دو مورد دیگر با کران‌های کسری)

در هر قسمت، علامت عمل (∪ یا ∩) در متن کتاب خوانا نبود؛ برای اطمینان هم اجتماع و هم اشتراک را می‌نویسیم. روش: دو بازه را روی یک محور رسم می‌کنیم؛ اجتماع، ناحیه‌ای است که با دست‌کم یکی از دو بازه پوشیده شده و اشتراک، ناحیه‌ای است که هر دو آن را می‌پوشانند.



- (الف) $[-2,5) \cap (-3,0] = [-2, 0]$ ، $[-2,5) \cup (-3,0] = (-3, 5)$ ← با $(۲,۵-]$ و $[۳,۰-)$
- (ب) $(2,9) \cap (-\infty,6] = (2, 6]$ ، $(2,9) \cup (-\infty,6] = (-\infty, 9)$ ← با $(۲,۹)$ و $[۶,\infty-)$
- (پ) $(6,10] \cap (3,+\infty) = (6, 10]$ ، $(6,10] \cup (3,+\infty) = (3, +\infty)$ ← با $(۳,\infty+)$ و $[۶,۱۰)$
- (ت) $[1,+\infty) \cap (-\infty,1) = \varnothing$ ، $[1,+\infty) \cup (-\infty,1) = R$ ← با $(۱,\infty-)$ و $(\infty+,۱]$

ث) و ج) این دو مورد بازه‌هایی با کران‌های کسری و $\pm\infty$ هستند که در متن موجود به‌طور کامل خوانا نبود. روش همان است: هر دو بازه را روی یک محور رسم کنید؛ برای اجتماع هر قسمتی که حتی با یک بازه پوشیده می‌شود و برای اشتراک فقط قسمتِ مشترک را بنویسید و به باز یا بسته بودن سرها دقت کنید (سر مشترک فقط وقتی در جواب می‌آید که در هر دو بازه باشد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۳ صفحه ۷ تمرین

۵ مجموعهٔ $R - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



همهٔ اعداد حقیقی به‌جز ۳: $R - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۷ تمرین

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

A متناهی است. زیرا هر عضو A عضو B هم هست؛ پس تعداد اعضای A از تعداد اعضای B (که یک عدد حسابی است) بیشتر نمی‌شود. (به‌عبارت دیگر، اگر A نامتناهی بود، B هم که شامل A است نامتناهی می‌شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

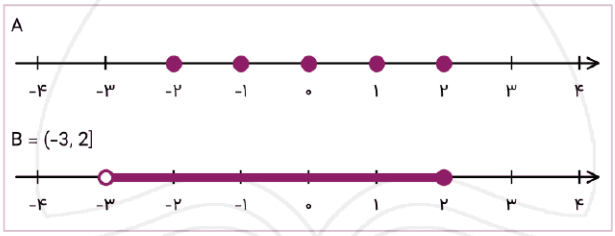
۲۵ صفحه ۸ فعالیت

الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید. $A = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$ ، $B = \{x \in R \mid -3 < x \leq 2\}$

ب) A را با نمایش اعضا و B را به‌صورت یک بازه بنویسید.

پ) در مورد A، اگر مجموعهٔ مرجع را Z در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

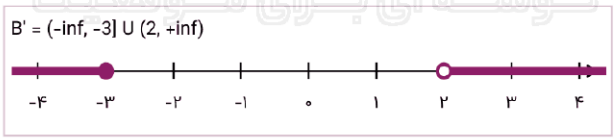
ت) در مورد B با فرض اینکه R مجموعهٔ مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



ب) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $B = (-3, 2]$.

پ) $A' = Z - A = \{..., -5, -4, -3, 3, 4, 5, ...\}$ (صحیح‌هایی که از ۲- کوچک‌ترند یا از ۲ بزرگ‌ترند).

ت) $B' = R - B = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$:



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۹ کار در کلاس

۱ اگر U مجموعهٔ شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعهٔ استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

A' استان‌های «ساحلی» (دارای مرز آبی با دریا) است:

{گیلان، مازندران، گلستان، خوزستان، بوشهر، هرمزگان، سیستان و بلوچستان}

(سه استان اول در کنار دریای خزر و چهار استان دیگر در کنار خلیج فارس و دریای عمان قرار دارند.)

۲۷ صفحه ۹ کار در کلاس

۲ فرض کنیم U مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری‌شدهٔ کشور و B مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این‌صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

B' مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری‌شدهٔ کشور است که پلاک آن‌ها **فرد نیست**؛ یعنی مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک **زوج**.

۲۸ صفحه ۹ کار در کلاس

۳ با فرض آنکه N مجموعهٔ مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

مجموعه	N متمم آن در
{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...} (فردها)	{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ...} (زوج‌ها)
{۳, ۶, ۹, ۱۲, ...} (مضرب‌های ۳)	{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸, ...}
{۱, ۲, ۳, ..., ۹}	{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ...}
{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ...} (اول‌ها)	{۱, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ...} (۱ و ترکیبی‌ها)

رابطه متقابل است: متمم هر کدام از مجموعه‌های ستون دوم، همان مجموعهٔ ستون اول است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۹ کار در کلاس

۴ U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن می‌باشد. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید. $\varnothing' = \ldots$ ، $U' = \ldots$ ، $A \cap A' = \ldots$ ، $A \cup A' = \ldots$

- $\varnothing' = U$ (متمم تهی همهٔ مجموعهٔ مرجع است)
- $U' = \varnothing$
- $A \cup A' = U$
- $A' \cap A = \varnothing$

۳۰ صفحه ۹ کار در کلاس

۵ الف) اگر Z را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر R را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، در این صورت N' را روی محور نمایش دهید.

الف) $N' = Z - N = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

ب) $N' = R - N$: همهٔ اعداد حقیقی به‌جز ۱, ۲, ۳, ...؛ یعنی کل محور با برداشتن نقطه‌های ۱, ۲, ۳, ... (دایرهٔ توخالی روی هر کدام):



به‌صورت بازه‌ای: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \ldots$

۳۱ صفحه ۹ کار در کلاس

۶ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A = \{1, 2, 3\} = (A')'$ ، $B' = \{1, 3, 5\}$ ، $A' = \{4, 5\}$.

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	نتیجه
{۱, ۲, ۳, ۴}	{۵}	{۵}	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$	نتیجه
{۲}	{۵ ,۴ ,۳ ,۱}	{۵ ,۴ ,۳ ,۱}	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A - B$	$A - (A \cap B)$	$A \cap B'$	نتیجه
{۳ ,۱}	{۳ ,۱}	{۳ ,۱}	$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

نتیجه: متمم اجتماع دو مجموعه برابر اشتراک متمم‌هاست، متمم اشتراک برابر اجتماع متمم‌هاست (قوانین دمورگان) و تفاضل $A - B$ همان $A \cap B'$ است.

۳۲ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۷ الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعهٔ مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$، در این‌صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به‌دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است.

الف) در نمودار، A درون B و B درون U است. A' ناحیهٔ بیرون A (داخل U) و B' ناحیهٔ بیرون B (داخل U) است. ناحیهٔ B' فقط بخشی از ناحیهٔ A' است، پس $B' \subseteq A'$.

دلیل: اگر $x \in B'$ باشد، $x \notin B$ و چون $A \subseteq B$ است، $x \notin A$؛ یعنی $x \in A'$. پس $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$ (رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن «برعکس» می‌شود).

ب) $A' = \{c, d, e\}$ و $B' = \{d, e\}$. هر عضو B' در A' هم هست؛ پس $B' \subseteq A'$ ✓.

۳۳ صفحه ۱۰ فعالیت

۱ یک تیم کوهنوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسهٔ طرفدار محیط زیست است. ... اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعهٔ A = {آنیتا، زهرا، الناز، الهام} و اعضای دانشجوی آن مجموعهٔ B = {فاطمه، معصومه، فرزانه} هستند.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید. $n(A) \mid n(B) \mid n(A \cap B) \mid n(A \cup B)$

ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک فرمول بنویسید.

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B برقرار است؟

الف) $A \cup B$ = {آنیتا، زهرا، الناز، الهام، فاطمه، معصومه، فرزانه}

n(A)	n(B)	n(A ∩ B)	n(A ∪ B)
۴	۳	۰	۷

ب) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ $(۷ = ۴ + ۳)$.

پ) وقتی دو مجموعه مجزا باشند، یعنی $A \cap B = \varnothing$ (عضو مشترک نداشته باشند).

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۳۴ صفحه ۱۱ **فعالیت**

۲ الف) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و 30 را به‌ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته‌شده را بنویسید.

A: مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۸ ← ۶ = n(A): مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۳۰ ← A ∩ B = ... = n(B):

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ ← n(A ∪ B) ← A ∪ B = { } = ... = n(A ∩ B) = ...

ب) جدول زیر را کامل کنید. n(A ∪ B) | n(A ∩ B) | n(B) | n(A)

پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به‌دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$، در این مثال برقرار نیست؟

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطهٔ درست برای n(A ∪ B) را حدس بزنید.

الف)

- $A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \rightarrow n(A) = ۶$
- $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \rightarrow n(B) = ۸$
- $A \cap B = \{1, 2\} \rightarrow n(A \cap B) = ۲$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \rightarrow n(A \cup B) = ۱۲$

ب)

n(A)	n(B)	n(A ∩ B)	n(A ∪ B)
۶	۸	۲	۱۲

پ) چون این دو مجموعه عضو مشترک دارند $(A \cap B \neq \varnothing)$؛ با جمع n(A) و n(B)، اعضای مشترک (۱ و ۲) دو بار شمرده می‌شوند: $۱۴ = ۸ + ۶ \neq ۱۲$.

ت) در نمودار ون: ناحیهٔ فقطA دارای ۴ عضو ({۴, ۷, ۱۴, ۲۸})، ناحیهٔ مشترک ۲ عضو ({۱, ۲}) و ناحیهٔ فقطB دارای ۶ عضو ({۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰}) است. چون ناحیهٔ مشترک دو بار شمرده شده، یک بار کم می‌کنیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۱۲ = ۶ + ۸ - ۲)$$

بحث دربارهٔ علت درستی رابطه: n(A) شامل ناحیهٔ مشترک نیز هست و n(B) هم همین ناحیه را دارد؛ پس در n(A) + n(B) ناحیهٔ مشترک دو بار شمرده می‌شود. با کم کردن n(A ∩ B) یک بار از آن، هر عضو اجتماع دقیقاً یک بار شمرده می‌شود.

---

۳۵ صفحه ۱۱ کار در کلاس

۱ یک دورهٔ جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به‌طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند. ب) غیرپویانمایی و غیرطنزند.

روش اول حل: مجموعهٔ شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعهٔ فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعهٔ فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

روش دوم حل: در نمودار ون مقابل، دو مجموعهٔ C و T سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

روش اول: $n(U) = ۲۱ ،\ n(C) = ۷ ،\ n(T) = ۸ ،\ n(C \cap T) = ۳$

الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$

ب) $n((C \cup T)') = n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹$

روش دوم: فیلم‌های فقط پویانمایی = ۷ − ۳ = ۴ (عدد نوشته‌شده در نمودار «۴ فیلم»)، فیلم‌های هر دو = ۳ («سه فیلم»)، فیلم‌های فقط طنز = ۸ − ۳ = ۵ و فیلم‌های بیرون هر دو دایره = ۲۱ − (۴ + ۳ + ۵) = ۹.

الف) پویانمایی یا طنز: ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲ فیلم. ب) غیرپویانمایی و غیرطنز: ۹ فیلم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۶ صفحه ۱۲ کار در کلاس

۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.

روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نیستند، پس $n(F \cup B) = ۲۰$. حال با نوشتن فرمول $n(F \cup B)$ می‌توان $n(F \cap B)$ را به‌دست آورد.

روش اول: اگر x نفر عضو هر دو تیم باشند، فقط فوتبال: ۱۵ − x نفر، فقط بسکتبال: ۱۱ − x نفر و بیرون دو تیم ۵ نفر است. جمع همه ۲۵ نفر است:

$$(۱۵ - x) + x + (۱۱ - x) + ۵ = ۲۵ \Rightarrow ۳۱ - x = ۲۵ \Rightarrow x = ۶$$

روش دوم: $n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B) \Rightarrow ۲۰ = ۱۵ + ۱۱ - n(F \cap B) \Rightarrow n(F \cap B) = ۶$

پس ۶ نفر عضو هر دو تیم هستند.

۳۷ صفحه ۱۲ تمرین

R را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-۳, ۲)$ **ب)** $B = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ **پ)** $C = (۰, +\infty)$ **ت)** $D = (-\infty, ۱]$

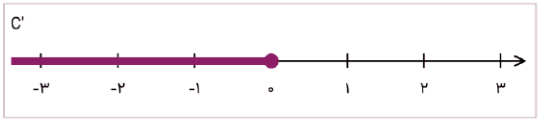
الف) $A' = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$



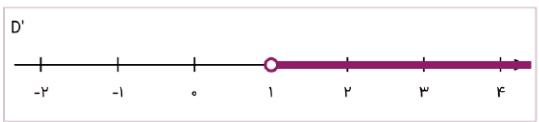
ب) $B' = R - W$: همهٔ اعداد حقیقی که عددی حسابی نیستند؛ یعنی $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \ldots$ (کل محور بدون نقطه‌های ۰, ۱, ۲, ۳, ...).



پ) $C' = (-\infty, 0]$



ت) $D' = (1, +\infty)$



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۸ صفحه ۱۲ تمرین

۲ N را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به‌دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

الف) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ (زوج‌ها) که $A' = \{1, 3, 5, \ldots\}$ (فردها) هم نامتناهی است.

ب) $B = \{4, 5, 6, \ldots\}$ که $B' = \{1, 2, 3\}$ متناهی است.

پ) $C = \{1, 2, 3\} \Rightarrow C' = \{4, 5, 6, \ldots\}$ **نامتناهی** است (N نامتناهی است و اگر C' هم متناهی بود، $N = C \cup C'$ متناهی می‌شد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۹ صفحه ۱۳ تمرین

۳ اگر $n(A \cap B) = ۵$ ، $n(A) = ۱۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵ + n(B) - ۵ \Rightarrow n(B) = ۲۰$$

۴۰ صفحه ۱۳ تمرین

۴ فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به‌طوری که $n(B) = ۶۰$ ، $n(A) = ۱۰۰$ ، $n(U) =$ ۴۰ و $n(A \cap B) = ۲۰$ مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$

- **الف)** $n(A \cup B) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰ = ۸۰$
- **ب)** $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۶۰ - ۲۰ = ۴۰$
- **پ)** $n(A' \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۴۰ - ۲۰ = ۲۰$
- **ت)** $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰$

۴۱ صفحه ۱۳ تمرین

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

الف) فقط سرود = ۱۴ − ۵ = **۹ نفر**.

ب) n(رتائت ∪ دورس) = ۱۴ + ۱۹ − ۵ = ۲۸ و بقیه عضو هیچ گروهی نیستند: ۳۱ − ۲۸ = **۳ نفر**.

۴۲ صفحه ۱۳ تمرین

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

- **الف)** n(A ∪ B) = ۷۰ + ۵۷ − ۳۲ = **۹۵ نفر**
- **ب)** فقط A: ۷۰ − ۳۲ = **۳۸ نفر**
- **پ)** دقیقاً یکی: (۷۰ − ۳۲) + (۵۷ − ۳۲) = ۳۸ + ۲۵ = **۶۳ نفر** (یا ۹۵ − ۳۲ = ۶۳)
- **ت)** هیچ‌کدام: ۱۱۰ − ۹۵ = **۱۵ نفر**

۴۳ صفحه ۱۴ مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در هر یک از آن‌ها توجه کنید. (شکل ۱: ۵ چوب‌کبریت، شکل ۲: ۸ چوب‌کبریت، شکل ۳: ۱۱ چوب‌کبریت) n: شمارهٔ شکل = ۱, ۲, ۳, ۴, ... ، a_n: تعداد چوب‌کبریت‌ها = ۵, ۸, ۱۱, ... ، رابطهٔ بین n و a_n: $a_1 = ۵$ ، $a_2 = ۸$ ، $a_3 = ۱۱$ ، ...

الف) با این نمادگذاری، a_4 نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب) a_n به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

الف) a_4 تعداد چوب‌کبریت‌های **شکل چهارم** است. هر شکل نسبت به شکل قبل ۳ چوب‌کبریت بیشتر دارد (۵, ۸, ۱۱ ← ۱۴)، پس $a_4 = ۱۱ + ۳ = ۱۴$.

ب) a_n تعداد چوب‌کبریت‌های **شکل nام** است (جملهٔ nام الگو).

پ) بله؛ a_n = 3n + 2 (در فعالیت صفحهٔ بعد به‌دست می‌آید؛ مثلاً $a_1 = ۳ + ۲ = ۵$ ✓).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۴ صفحه ۱۵ فعالیت

۱ آیدا برای به‌دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به‌صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به‌کمک این روش، مقدار a_{10} و a_n را به‌دست آورید. $a_1 = ۱(۳) + ۲$ ، $a_2 = ۲(۳) + ۲$ ، $a_3 = ۳(۳) + ۲$ ، $a_4 = ۴(۳) + ۲$ ، ... ، a_n ، ... = a_{10} = ...

۲ آیسا روش دیگری را به‌کار برد. او تعداد چوب‌کبریت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به‌طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص‌شده بنویسید. $a_1 = ۱ + ۲(۲)$ ، $a_2 = ۲ + ۲(۳)$ ، $a_3 = ۳ + ۲(۴)$ ، $a_4 = ۴ + ۲(۵)$ ، ... ، $a_{10} = ۱۰ + ۲(۱۰+۱)$ ، ... ، a_n = ...

۳ آیا شما راه دیگری را برای به‌دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟

۴ همان‌طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار a_n را به‌ترتیب به‌صورت‌های a_n = ۳n + ۲ و a_n = n + ۲(n+۱) به‌دست آوردند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

۵ به‌کمک رابطهٔ a_n = ۳n + ۲ تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

۶ با استفاده از رابطهٔ a_n = ۳n + ۲ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب‌کبریت است.

۱) شکل nام یک «اولیهٔ ۲ چوب‌کبریتی» دارد و به ازای هر یک از n واحد، ۳ چوب‌کبریت اضافه می‌شود:

$a_1 = 5$ ، $a_2 = 8$ ، $a_3 = 11$ ، $a_4 = 14$ ، ... ، $a_{10} = 10(3) + 2 = 32$ ، ... ، $a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$

۲) a_n = n + 2(n + 1) (n چوب افقی و ۲(n+۱) چوب عمودی؛ مثلاً $a_{10} = ۱۰ + ۲(۱۱) = ۳۲$ ✓).

۳) بله؛ مثلاً از دنبالهٔ ۵, ۸, ۱۱, ... می‌بینیم جمله‌ها با اضافه کردن ۳ هر بار ساخته می‌شوند: a_n = 5 + 3(n − 1) که برابر ۲ + ۳n می‌شود. یا از رابطهٔ خط y = ۳x + ۲ (شیب ۳ و عرض از مبدأ ۲).

۴) n + 2(n + 1) = n + 2n + 2 = 3n + 2 ✓ همان جواب آیدا.

۵) $a_{20} = 3(20) + 2 = 62$ چوب‌کبریت.

۶) 3n + 2 = 77 ⇒ 3n = 75 ⇒ n = 25 ← شکل بیست‌وپنجم.

۴۵ صفحه ۱۷ کار در کلاس

۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید. (شکل ۱: ۴ مربع رنگی، شکل ۲: ۸ مربع رنگی، شکل ۳ ...) n: شمارهٔ شکل = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ؛ b_n: تعداد مربع‌های رنگی = ۴, ۸, ... ؛ رابطهٔ بین n و b_2 ، $b_1 = ۴$:b_n = ... ، ...

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.

۳ با توجه به میزان افزایش جمله‌های الگو، مقدار a در رابطهٔ b_n = an + h را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به‌دست آورید.

۴ شکل شمارهٔ ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵ در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

۱) شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب ۴ و ۸ مربع رنگی دارند؛ یعنی در هر مرحله ۴ مربع رنگی اضافه می‌شود. پس شکل بعدی (شکل ۳) ۱۲ مربع رنگی دارد. جدول:

n	۱	۲	۳	۴	۵
b_n	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه	$b_1 = ۴(۱)$	$b_2 = ۴(۲)$	$b_3 = ۴(۳)$	$b_4 = ۴(۴)$	$b_5 = ۴(۵)$

۲) اختلاف هر دو جملهٔ متوالی ثابت (برابر ۴) است؛ پس خطی است.

۳) $a = ۴$ (میزان افزایش). از $b_1 = ۴ = ۴(۱) + h$ نتیجه می‌شود $h = ۰$؛ پس $b_n = 4n$.

۴) $b_{250} = 4 \times 250 = 1000$ مربع رنگی.

۵) $4n = 144 \Rightarrow n = 36$ ← شکل سی‌وششم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۶ صفحه ۱۷ فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید. (شکل ۱: ۵ نقطه، شکل ۲: ۱۲ نقطه) n: ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ؛ t_n: ۵, ۱۲, ... ؛ رابطهٔ بین n و t_n: $t_1 = ۵$ ، $t_2 = ... = t_n$ ، ... ، ...

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

۱) تعداد نقطه‌ها در شکل‌های متوالی ۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵, ... است (اختلاف‌ها ۷, ۹, ۱۱, ۱۳؛ پس شکل سوم ۲۱ و شکل چهارم ۳۲ نقطه دارد).

n	۱	۲	۳	۴	۵
t_n	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه	$۴(۱) + ۱^2$	$۴(۲) + ۲^2$	$۴(۳) + ۳^2$	$۴(۴) + ۴^2$	$۴(۵) + ۵^2$

۲) خیر؛ اختلاف جمله‌های متوالی ثابت نیست: ۱۲−۵ = ۷ ، ۲۱−۱۲ = ۹ ، ۳۲−۲۱ = ۱۱ ، ... (اختلاف‌ها خودشان ۲ تا ۲ زیاد می‌شوند). پس الگو خطی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

irantooshe.ir

۴۷ صفحه ۱۸ — فعالیت

۳ امیررضا برای یافتن جملهٔ عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید. $t_1 = (1)^2 + 4(1)$ ، $t_2 = (2)^2 + 4(2)$ ، $t_3 = (3)^2 + 4(3)$ ، t_4 = ... ، t_n ، ... ، $(4)4 + ^2(4)$ = ...

۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به‌صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید. $t_1 = ۳^2 - ۴ = (۱+۲)^2 - ۴$ ، $t_2 = ۴^2 - ۴ = (۲+۲)^2 - ۴$ ، t_3 = ... ، $(۳+۲)^2 - ۴$ ، t_n ، ... ، $t_4 = (۴+۲)^2 - ۴$ = ...

۵ نشان دهید که دو مقدار به‌دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

۳) با دسته‌بندی شکل‌ها، هر شکل از یک مربع n × n از نقطه‌ها و ۴ دستهٔ nتایی دیگر تشکیل می‌شود: $t_n = n^2 + 4n$.

۴) هر شکل را مربع (n+۲) × (n+۲) در نظر می‌گیریم که ۴ نقطهٔ گوشه‌ای آن کم شده است: $t_n = (n + 2)^2 - 4$.

۵) $(n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$ ✓ هر دو یکسان‌اند.

۶) بله؛ مثلاً می‌توان t_n را به‌صورت مستطیل (n+۴) × n دید: $t_n = n(n + 4)$ که برابر $n^2 + 4n$ است. یا با دیدن اینکه اختلاف‌ها ۷, ۹, ۱۱, ... (دنباله‌ای حسابی) هستند، یک چندجمله‌ای درجه ۲ برازش داد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۸ صفحه ۱۹ — کار در کلاس

۱ دو دنبالهٔ دلخواه مثال بزنید.

مثلاً: ... ,۸ ,۶ ,۴ ,۲ (زوج‌ها) و ... ,۱۶ ,۹ ,۴ ,۱ (مربع‌های کامل). یا دنباله‌ای بدون الگو مثل ... ,۴ ,۱۹ ,۳ ,۷

۴۹ صفحه ۱۹ — کار در کلاس

۲ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) ۲۴ ، ۱۵ ، ... ، ۳ ، ۰ : $a_n = n^2 - ۱$

ب) ۲- ، ... ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ : $b_n = -n + ۴$

پ) ۳- ، ... ، ۷- ، ... ، ۱۱- : $c_n = -۱۳ + ۲n$

الف) $a_3 = 3^2 - 1 = 8 \leftarrow$ 0, 3, 8, 15, 24

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) $-1 = -5 + 4 = b_5 \leftarrow -2, -1, 0, 1, 2, 3$ $(b_6 = -2)$.

پ) $9- = -13 + 4 = c_2$ و $5- = -13 + 8 = c_4 \leftarrow -3, -5, -7, -9, -11$.

۵۰ صفحه ۱۹ کار در کلاس

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جملهٔ عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

(۱) ۱-, ۲-, ۳-, ۴-, ... (۲) ۱, ۳, ۵, ۷, ... (۳) ۱, ۴, ۹, ۱۶, ... (۴) ۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱, ... (۵) ۱-, ۸, ۲۷-, ۶۴, ...

(۶) ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ... (۷) ۱/۴, ۱/۲-, ۱, ۲-, ... (۸) ۱, ۲, ۴, ۷, ... (۹) ۱, ۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ... (۱۰) ۱, ۱, ۲, ۱, ۳, ۵, ... (۱۱) ۲, ۳, ۵, ۷, ...

دنباله	سه جملهٔ بعدی	جملهٔ عمومی
۱-, ۲-, ۳-, ۴-	۵-, ۶-, ۷-	$t_n = -n$
۱, ۳, ۵, ۷	۹, ۱۱, ۱۳	$t_n = 2n - 1$
۱, ۴, ۹, ۱۶	۲۵, ۳۶, ۴۹	$t_n = n^2$
۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۰۱	$t_n = 10^{(-n)}$
۱-, ۸, ۲۷-, ۶۴	۱۲۵-, ۲۱۶, ۳۴۳-	$t_n = (-1)^n \cdot n^3$
۵, ۸, ۱۱, ۱۴	۱۷, ۲۰, ۲۳	$(t_n = 3n + 2)$
۱/۴, ۱/۲-, ۱, ۲-	۴, ۸-, ۱۶	(هر جمله ۲- برابر قبلی)
۱, ۲, ۴, ۷	۱۱, ۱۶, ۲۲	(اختلاف‌ها ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...)
۳, ۱, ۴, ۱, ۵	۹, ۲, ۶	(رقم‌های عدد $\pi = 3/14159265...$)
۱, ۱, ۲, ۳, ۵	۸, ۱۳, ۲۱	(دنبالهٔ فیبوناچی: هر جمله مجموع دو جملهٔ قبلی)
۲, ۳, ۵, ۷	۱۱, ۱۳, ۱۷	(اعداد اول)

برای ردیف (۸) می‌توان جملهٔ عمومی $t_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ را هم نوشت. توجه: بعضی ردیف‌های جدول کتاب به‌طور کامل خوانا نبود و برداشت بالا بر پایهٔ الگوی آشکار آن‌هاست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۱ صفحه ۱۹ — کار در کلاس

۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید. (شکل ۱: ۱ مربع، شکل ۲: ۳ مربع، شکل ۳: ۶ مربع، شکل ۴ ...)

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی صفحهٔ قبل را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید. a_1 ، ... = a_2 ، ... = a_3 = ... = ...

ت) به کمک مرحلهٔ قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید. ۱ + ۲ + ۳ + ... + n = ...

الف) هر شکل یک ردیف تازه (یک مربع بیشتر از ردیف قبل) دارد: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

ب) خیر؛ اختلاف جمله‌های متوالی ثابت نیست (۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ...).

پ) دو نسخهٔ یک شکل (پلکانی) را کنار هم می‌گذاریم تا مستطیلی به ابعاد (n+۱) × n پدید آید؛ پس دو برابر a_n برابر n(n+۱) است:

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (مثلاً $a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$ و $a_2 = 3$ و $a_1 = 1$)

ت) مجموع ۱ + ۲ + ۳ + ... + n همان تعداد مربع‌های شکل nام است: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۲ صفحه ۲۰ — تمرین

۱ به الگوی روبه‌رو توجه کنید. (شکل ۱: ۱ کاشی سفید و ۶ کاشی تیره، شکل ۲: ۲ کاشی سفید و ۸ کاشی تیره، شکل ۳: ۳ کاشی سفید و ۱۰ کاشی تیره)

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیرهٔ آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

الف) شکل چهارم ۴ کاشی سفید و ۱۲ کاشی تیره دارد (با هر کاشی سفید جدید، ۲ کاشی تیره اضافه می‌شود).

ب) 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

پ) $t_n = 2n + 4$ (مثلاً $n = 1: 2 + 4 = 6$ ✓).

ت) $t_{100} = 2(100) + 4 = 204$ کاشی تیره.

ث) $2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$ که عدد طبیعی است؛ پس بله، شکل بیست‌وسوم ۵۰ کاشی تیره و **۲۳ کاشی سفید** دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۳ صفحه ۲۰ تمرین

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید. (شکل ۱: ۱ نقطه، شکل ۲: ۶ نقطه، شکل ۳: ۱۵ نقطه، شکل ۴ ...)

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

الف) اختلاف‌ها ۵ و ۹ هستند و هر بار ۴ تا زیاد می‌شوند (۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ...). پس جمله‌ها:

1, 6, 15, 28, 45, 66

ب) چون اختلاف مرتبهٔ دوم ثابت و برابر ۴ است، جمله به‌صورت $an^2 + bn + c$ با $a = 2$ است. با حل: $t_n = 2n^2 - n = n(2n - 1)$ (n=۱: ۱ ✓ ، n=۲: ۶ ✓ ، n=۳: ۱۵ ✓).

پ) $t_{10} = 10 \times 19 = 190$ نقطه.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۴ صفحه ۲۰ تمرین

۳ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 4n$ ب) $b_n = 3n + 1$ پ) $c_n = n^2$ ت) $d_n = n^2 + n + 2$

الف) 4, 8, 12, 16 ← مثلاً n گروه چهارتایی از نقطه‌ها (یا n مربع که هر کدام ۴ ضلع جدا دارند).

ب) 4, 7, 10, 13 ← زنجیره‌ای از n مربع کنار هم با چوب‌کبریت (۴ چوب برای اولی و هر مربع بعدی ۳ چوب).

پ) 1, 4, 9, 16 ← مربع $n \times n$ از نقطه‌ها یا مربع‌ها.

ت) 4, 8, 14, 22 (اگر $d_n = n^2 + n + 2$ باشد) ← مستطیلی $n \times (n+1)$ از نقطه‌ها (۲, ۶, ۱۲, ۲۰) به‌اضافهٔ ۲ نقطهٔ ثابت.

پاسخ هندسی یکتا نیست و هر الگوی هندسی که شمارش آن به همین جمله‌ها برسد پذیرفتنی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۵ صفحه ۲۰ تمرین

۴ برای هریک از دنباله‌های درجه دوم زیر جملهٔ عمومی را به‌دست آورید و سپس برای هرکدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ... ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

الف) اختلاف‌ها: ۳, ۵, ۷, ۹ و اختلاف مرتبهٔ دوم: ۲ ⇒ ضریب n^2 برابر ۱ است. $t_n = n^2 + 4$ (n=۱: ۵ ✓ ، n=۲: ۸ ✓ ، n=۳: ۱۳ ✓ ، n=۵: ۲۹ ✓). الگوی هندسی: مربع n × n از نقطه‌ها به‌اضافهٔ ۴ نقطهٔ ثابت.

ب) اختلاف‌ها: ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶ و اختلاف مرتبهٔ دوم: ۳ ⇒ ضریب n^2 برابر ۳/۲ است. حل دستگاه:

$$t_n = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$ (مثلاً $t_5 = \frac{6 \times 17}{2} = 51$ ✓)

الگوی هندسی: اعداد «پنج‌ضلعی» (پنج‌ضلعی‌های تودرتو با رأس مشترک) که شکل nام تعداد نقطهٔ پنج‌ضلعی با ضلع n+۱ را دارد؛ ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۶ صفحه ۲۱ فعالیت

۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزارهٔ سوم میلادی به بعد به‌صورت زیر است که جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی‌اند. ۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ...

الف) جملهٔ اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = ...$ ، $d = ...$

ب) نهمین دورهٔ المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جملهٔ عمومی این دنباله را به‌دست آورید. t_1 ؛ t_2 ، t_3 ، t_4 ، ... ، t_9 ، ... ، t_n ، ۲۰۰۰ ، ۲۰۰۰+۱(۴) ، ۲۰۰۰+۲(۴) ، ۲۰۰۰+۳(۴) ، ... ، ۲۰۰۰+(...)(۴) ، ... ، ۲۰۰۰+(.....)(۴)

ت) بیست‌وچهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟ $t_{24} = ...$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را به‌دست آورید. t_1 ؛ t_2 ، t_3 ، t_4 ، t_5 ، t_6 ، ... ، t_n ، ... ، $t_1 + (.....)d$ ، ... ، $t_1 + 3d$ ، $t_1 + 2d$ ، $t_1 + 1d$ ، t_1

الف) $t_1 = 2000$ ، $d = 4$

ب) $t_9 = 2000 + 8(4) = 2032$ (نهمین دوره در سال ۲۰۳۲).

پ) $t_2 = 2000 + 1(4)$ ، $t_3 = 2000 + 2(4)$ ، ... ، $t_9 = 2000 + 8(4)$ ، ... ، $t_n = 2000 + (n-1)(4) = 4n + 1996$

ت) $t_{24} = 2000 + 23(4) = 2092$

۲) t_1 ، $t_1 + d$ ، $t_1 + 2d$ ، $t_1 + 3d$ ، $t_1 + 4d$ ، $t_1 + 5d$ ، ... ، $t_n = t_1 + (n-1)d$

ضریب d، همیشه «یکی کمتر از شمارهٔ جمله» است؛ چون برای رسیدن از جملهٔ اول به جملهٔ nام، (n − ۱) بار d اضافه می‌کنیم.

۵۷ صفحه ۲۲ — کار در کلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هر کدام را به‌دست آورید.

الف) ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ... ب) ۱, ۳, ۵, ۷, ... پ) ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ... ت) ۱۳, ۷, ۱, −۵, ...

دنباله	d قدر نسبت	سه جملهٔ بعدی	جملهٔ عمومی
الف	۵	۳۵, ۳۰, ۲۵	$a_n = ۵ + (n-۱)۵ = ۵n$
ب	۲	۱۳, ۱۱, ۹	$b_n = ۱ + (n-۱)۲ = ۲n - ۱$
پ	۴	۲۹, ۲۵, ۲۱	$c_n = ۵ + (n-۱)۴ = ۴n + ۱$
ت	−۶	−۱۱, −۱۷, −۲۳	$d_n = ۱۳ + (n-۱)(-۶) = ۱۹ - ۶n$

۵۸ صفحه ۲۲ — کار در کلاس

۲ A و B دو شرکت عرضه‌کنندهٔ سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند. (شرکت A: هزینهٔ ثابت ماهانه ۲۰۰۰ تومان و هر دقیقه مکالمه ۳۰ تومان؛ شرکت B: هزینهٔ ثابت ماهانه ۳۰۰۰ تومان و هر دقیقه مکالمه ۲۰ تومان) فرض کنیم a_n نشان‌دهندهٔ هزینهٔ کل n دقیقه مکالمهٔ ماهانه از طریق سیم‌کارت شرکت A و b_n هزینهٔ مشابه برای استفاده از سیم‌کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید. (n: ۱۰ ، ۴۰ ، ۶۰ ، ۱۱۰ ، ۱۶۰)

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشند؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آن‌ها کدام سیم‌کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

الف) $a_n = 30n + 2000$ و $b_n = 20n + 3000$

ب)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

زمان مکالمه (دقیقه) :n	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n: هزینهٔ سیم‌کارت A	۲۰۳۰	۳۲۰۰	۳۸۰۰	۵۳۰۰	۶۸۰۰
b_n: هزینهٔ سیم‌کارت B	۳۰۲۰	۳۸۰۰	۴۲۰۰	۵۲۰۰	۶۲۰۰

پ) بله، هر دو؛ چون هر دو به شکل «عدد × n + عدد ثابت» (الگوی خطی) هستند و اختلاف دو جملهٔ متوالی ثابت است: قدر نسبت a_n برابر ۳۰ و قدر نسبت b_n برابر ۲۰ است.

ت) سارا (۶۰ دقیقه): A هزینه ۳۸۰۰ و B هزینه ۴۲۰۰ ← سیم‌کارت **A** ارزان‌تر است. فاطمه (۱۵۰ دقیقه): A ← ۶۵۰۰ و ۶۰۰۰ ← B ← سیم‌کارت **B** ارزان‌تر است. (دو تعرفه در ۱۰۰ دقیقه برابر می‌شوند: ۵۰۰۰ تومان؛ برای کمتر از ۱۰۰ دقیقه A و برای بیشتر از آن B بهتر است.)

۵۹ صفحه ۲۳ مثال

در دنبالهٔ حسابی زیر جملهٔ شانزدهم را به‌دست آورید. ۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ... (آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟)

روش آرتین: $t_{16} = t_1 + 15d = 4 + 15(7) = 109$

روش آرکان (الگوی خطی با قدر نسبت ۷): $t_n = 7n + b \; ، \; t_1 = 7(1) + b = 4 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow t_n = 7n - 3 \Rightarrow t_{16} = 7(16) - 3 = 109$

هر دو روش ۱۰۹ را می‌دهند؛ روش آرتین مستقیم و با فرمول است و روش آرکان جملهٔ عمومی کامل را هم می‌دهد (انتخاب با شماست).

۶۰ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۱ الف) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.

ب) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جملهٔ مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

الف) با $(t_4 = ۱۰)$ ... 4, 6, 8, 10, 12, :$d = ۲$.

ب) با $(t_4 = ۱۰)$ ... 19, 16, 13, 10, 7, :$d = -۳$.

پ) مثلاً ... 5, 3, 1, −1, −3, −5, (قدر نسبت −۲): فقط سه جملهٔ اول مثبت‌اند و بقیه منفی‌اند.

۶۱ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. حل: با فرض اینکه ۱۸ جملهٔ اول باشد، قدرنسبت را به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص‌شده در هر مورد واسطهٔ حسابی درج کنید.

الف) $t_1 = ۱۸$ و $t_5 = ۶۲$: $t_5 = t_1 + ۴d \Rightarrow ۶۲ = ۱۸ + ۴d \Rightarrow d = ۱۱$

18, 29, 40, 51, 62 ← واسطه‌ها: ۲۹ ، ۴۰ ، ۵۱.

ب) اگر k واسطه درج کنیم، تعداد جمله‌ها k + ۲ است و $d = \frac{۸۰ - ۲۰}{k+۱} = \frac{۶۰}{k+۱}$:

تعداد واسطه‌ها	d	دنباله
۱	۳۰	20, 50, 80
۲	۲۰	20, 40, 60, 80
۳	۱۵	20, 35, 50, 65, 80
۴	۱۲	20, 32, 44, 56, 68, 80
۵	۱۰	20, 30, 40, 50, 60, 70, 80

(تعداد واسطه‌ها در هر ردیف شکل کتاب از روی تصویر قابل تشخیص نبود؛ برای ۱ تا ۵ واسطه جواب داده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۲ صفحه ۲۴ تمرین

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آن‌ها با تعیین قدرنسبت، جملهٔ بیست‌ویکم را بیابید.

الف) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ... ب) ۱, ۲, ۴, ۸, ... پ) $۳^۲$, $۳^۳$, $۳^۴$, ... ت) ۱, ۴, ۷, ۱۰, ... ث) و ج) (دو دنبالهٔ دیگر)

الف) حسابی است: $d = ۷$ و $t_{21} = 3 + 20(7) = 143$

ب) حسابی نیست (اختلاف‌ها ۱, ۲, ۴ برابر نیستند؛ هندسی با نسبت ۲ است).

پ) حسابی نیست (اختلاف‌ها: $۳^۲ = ۹$ ، $۳^۳ = ۲۷$ ؛ برابر نیستند؛ هندسی با نسبت ۳ است).

ت) حسابی است: $d = ۳$ و $t_{21} = 1 + 20(3) = 61$

ث) و ج) این دو دنباله در متن کتاب خوانا نبود. روش: اختلاف هر جمله و جملهٔ قبلی را بنویسید؛ اگر همهٔ این اختلاف‌ها برابر باشند دنباله حسابی است و $t_{۲۱} = t_۱ + ۲۰d$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۳ صفحه ۲۴ تمرین

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به‌ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به‌دست آوردن جملهٔ اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$t_۱ = t_۳ - ۲d = ۲۰ - ۱۸ = ۲$ ، $t_۷ - t_۳ = ۴d = ۵۶ - ۲۰ = ۳۶ \Rightarrow d = ۹$

$2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, \ldots$ و $t_n = 2 + 9(n-1) = 9n - 7$

۶۴ صفحه ۲۴ تمرین

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

سه جملهٔ بعدی: $(d + ۳) + (۲d + ۳) + (۳d + ۳) = ۵ = d \Rightarrow ۳۰ = ۶d \Rightarrow ۳۹ = ۶d + ۹$.

$3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ و $t_n = 5n - 2$ (بررسی: $۱۳ + ۸ + ۱۸ = ۳۹$ ✓)

۶۵ صفحه ۲۴ تمرین

۴ الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید. (شکل‌ها با ۱، ۵ و ۹ عنصر)

ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

الف) هر شکل ۴ عنصر بیشتر از شکل قبل دارد: $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ (دو شکل بعدی ۱۳ و ۱۷ عنصر دارند). دنباله **حسابی** با $d = ۴$ است.

ب) $t_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$

پ) $4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$ ← جملهٔ صدم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶ صفحه ۲۴ تمرین

۵ الف) واسطهٔ حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطهٔ حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $d = ۳ \leftarrow$ واسطه $5, 8, 11 \Rightarrow$ **۸**.

ب) $d = ۵ \leftarrow 20, 25, 30 \Rightarrow$ **۲۵**.

پ) واسطهٔ حسابی بین دو عدد، **میانگین** آن دو عدد است: $\frac{a+b}{۲}$ (مثلاً $\frac{۵+۱۱}{۲} = ۸$ و $\frac{۲۰+۳۰}{۲} = ۲۵$). چون اگر a, x, b حسابی باشند، $x - a = b - x$ و $x = (a+b)/2$.

۶۷ صفحه ۲۴ تمرین

۶ مسئلهٔ زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید. «۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

سهم‌ها را از کوچک به بزرگ $a - 2d$ ، $a - d$ ، a ، $a + d$ ، $a + 2d$ می‌گیریم. مجموع آن‌ها $۵a = ۱۰۰ \Rightarrow a = ۲۰$.

سه سهم بزرگ‌تر: $(۲۰ + ۲d) + (d + ۲۰) + ۲۰ = ۶۰ + ۳d$ و یک‌سوم آن $d + ۲۰$ است. دو سهم کوچک‌تر: $(۲۰ - ۲d) + (۲۰ - d) = ۴۰ - ۳d$. پس:

$$۲۰ + d = ۴۰ - ۳d \Rightarrow ۴d = ۲۰ \Rightarrow d = ۵$$

سهم‌ها: $10, 15, 20, 25, 30$ نان. (بررسی: $۷۵ \div ۳ = ۲۵ = ۱۰ + ۱۵$ ✓، و مجموع $= ۱۰۰$ ✓)

۶۸ صفحه ۲۵ فعالیت

علی به بیماری آنفلوانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش ... امید و محسن روز یکشنبه مبتلا شدند ... در روز اول بیماری هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل می‌کنند؛ به‌طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید. (n: روز ؛ t_n: تعداد افراد جدیدی که در روز nام مبتلا می‌شوند ؛ ۱: ۲ ، ۲: $۲ \times ۲ = ۲^۲$ ، ۳: $۲ \times ۴ = ۲^۳$ ، ۴: $۲ \times ۸ = ...$)

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفلوانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

۱) هر روز تعداد مبتلایان جدید دو برابر روز قبل است.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	n
t_n	۲	$۲^2 = ۴$	$۲^3 = ۸$	$۲^4 = ۱۶$	$۲^5 = ۳۲$	$۲^6 = ۶۴$	...	n^۲

$t_n = 2^n$

۲) $t_{10} = 2^{10} = 1024$ نفر.

۳) $t_{11} = 2^{11} = 2048$ نفر (دو برابر روز دهم).

۴) $2^n = 16384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14$ ← روز چهاردهم.

۶۹ صفحه ۲۵ فعالیت

در حالت کلی در یک دنبالهٔ هندسی، اگر جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید. t_n ، ... ، t_5 ، t_4 ، t_3 ، t_2 ، t_1 ؛ $t_1 r^2$ ، $t_1 r$ ، t_1 ، ... ، ... ، ...

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	...	$t_1 r^{(n-1)}$

هر بار در r ضرب می‌شود؛ پس برای رسیدن به جملهٔ nام، (n − ۱) بار ضرب در r داریم: $t_n = t_1 \cdot r^{(n-1)}$ (با $t_1 \neq ۰$ و $r \neq ۰$).

۷۰ صفحه ۲۶ کار در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبهٔ هفتمین جملهٔ دنبالهٔ هندسی ۹, ۳, ۱, ... روش‌های مقابل را به‌کار برده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

در دنبالهٔ ۹, ۳, ۱, ... جملهٔ اول ۹ است و هر جمله، **یک‌سوم** جملهٔ قبل است؛ پس قدر نسبت $r = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$ (جملهٔ بعدی ÷ جملهٔ قبلی).

نگار درست حل کرده است: $t_۷ = ۹ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۶ = \frac{۹}{۷۲۹} = \frac{۱}{۸۱}$

نرگس اشتباه کرده است: او قدر نسبت را $\frac{۹}{۳} = ۳$ (جملهٔ قبلی ÷ جملهٔ بعدی) گرفته و به نتیجهٔ ۶۵۶۱ رسیده؛ این عدد از جملهٔ هفتم دنباله‌ای صعودی ۹, ۲۷, ۸۱, ... است، نه این دنباله. قدر نسبت باید همیشه «جملهٔ بعدی تقسیم بر جملهٔ قبلی» باشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۱ صفحه ۲۶ | کار در کلاس

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.

الف) ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ... ، $a_n = 2\times3^{(n-1)}$ ب) ۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, ... ، b_n = ...

پ) ۶, −۶۰, ۶۰۰, −۶۰۰۰, ... ، c_n = ... ت) ۴, ۲, ۱, ۱/۲, ... ، d_n = ...

دنباله	r	دو جملهٔ بعدی	جملهٔ عمومی
الف	۳	۴۸۶ ,۱۶۲	$a_n = 2 \times 3^{(n-1)}$
ب	۲	۱۶۰ ,۸۰	$b_n = 5 \times 2^{(n-1)}$
پ	−۱۰	−۶۰۰۰۰۰ ,۶۰۰۰۰	$c_n = 6 \times (-10)^{(n-1)}$
ت	۱/۲	۱/۸ ,۱/۴	$d_n = 4 \times (1/2)^{(n-1)} = 2^{(3-n)}$

(قدر نسبت از تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبل به‌دست می‌آید؛ مثلاً در (پ): −۶۰ ÷ ۶ = −۱۰.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۲ صفحه ۲۶ | کار در کلاس

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطهٔ هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به‌جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنبالهٔ هندسی حاصل شود. (۱) ۱۰ ، □ ، ۴۰۰۰ (۲) ۱۰ ، □ ، □ ، ۸۰۰۰۰ (۳) ۴ ، □ ، □ ، □ ، □ ، ۹۷۲

الف) $r^2 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 4$. با $r = 4 \leftarrow 3, 12, 48$. با $r = -4 \leftarrow 3, -12, 48$. پس عدد دیگر **−۱۲** است.

ب) سه واسطه یعنی ۵ جمله: $t_5 = t_1 r^4 \Rightarrow 48 = 3r^4 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$

با $r = 2$: 3, 6, 12, 24, 48 و با $r = -2$: 3, −6, 12, −24, 48. جواب **یکتا نیست** (دو جواب).

پ) (۱) $r^2 = 400 \Rightarrow r = \pm 20$: 10, 200, 4000 یا 10, −200, 4000

(۲) $r^3 = 8000 \Rightarrow r = 20$: 10, 200, 4000, 80000

(۳) $r^5 = \frac{۹۷۲}{۴} = ۲۴۳ \Rightarrow r = ۳$: 4, 12, 36, 108, 324, 972

(تعداد خانه‌های خالی هر مورد از روی شکل کتاب برداشت شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۳ صفحه ۲۷ تمرین

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آن‌ها را بنویسید.

الف) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, ... ب) ۲/۵, ۴/۵, ۶/۵, ۸/۵, ... پ) ۱, -۱/۲, ۱/۴, -۱/۸, ... ت) ۵, ۵, ۵, ۵, ...

الف) هندسی است: $r = \frac{۲۸}{۷} = ۴$

ب) هندسی نیست: $\frac{۴/۵}{۲/۵} = ۲$ ولی $\frac{۶/۵}{۴/۵} = ۱.۵$ (دنباله حسابی با $d = ۲/۵$ است).

پ) هندسی است: $r = \frac{-۱/۲}{۱} = -\frac{۱}{۲}$

ت) هندسی است: $r = ۱$ (دنبالهٔ ثابت؛ همزمان حسابی با $d = ۰$ هم هست).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۴ صفحه ۲۷ تمرین

۲ چند دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۵/۴ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

بی‌شمار؛ چون جملهٔ اول می‌تواند هر عدد غیرصفر باشد. مثلاً:

4, 5, 25/4, 125/16, ... و 16, 20, 25, 125/4, ...

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۵ صفحه ۲۷ تمرین

۳ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

الف) نادرست. مثال نقض: دنبالهٔ ۱, ۴, ۹, ۱۶, ... (مربع‌ها): اختلاف‌ها ۳, ۵, ۷ برابر نیستند (حسابی نیست) و نسبت‌ها ۴, ۹/۴, ۱۶/۹ برابر نیستند (هندسی نیست). همچنین دنبالهٔ بدون الگوی ۷, ۳, ۱۹, ۴.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) نادرست. مثال نقض: دنبالهٔ ثابت ۵, ۵, ۵, ۵, ...؛ حسابی با $d = 0$ و هندسی با $r = 1$ است.

۷۶ صفحه ۲۷ تمرین

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

هر سال قیمت در ۰/۸ ضرب می‌شود (دنبالهٔ هندسی با $r = 0/8$ و $t_1 = 500$ (قیمت اولیه)).

الف) $500 \times (0.8)^3 = 500 \times 0.512 = 256$ ← **۲۵۶ هزار تومان**.

ب) $P_n = 500 \times (0.8)^n$ (هزار تومان).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۷ صفحه ۲۷ تمرین

۵ حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را محاسبه کنید. ۲, ۴, ۸, ...

جمله‌ها $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{20}$ هستند؛ پس حاصل‌ضرب برابر است با:

$$2^{1+2+3+\cdots+20} = 2^{\frac{20\times 21}{2}} = 2^{210}$$

(از فرمول مجموع $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ استفاده شد.)

۷۸ صفحه ۲۷ تمرین

۶ جملات سوم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به‌ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$t_1 = \frac{t_3}{r^2} = \frac{12}{4} = 3 \quad ، \quad \frac{t_6}{t_3} = r^3 = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow r = 2$$

3, 6, 12, 24, 48, 96, ... و $t_n = 3 \times 2^{(n-1)}$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۷۹ صفحه ۲۷ تمرین

۷ بنابر آمار منتشرشده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهندهٔ حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هموطنان ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

کاهش ۵ درصد در سال یعنی ضرب سالانه در ۰/۹۵. از ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ شروع می‌کنیم:

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

(مقادیر به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد شده‌اند؛ مثلاً ۱۶۵۸۴ × ۰/۹۵ = ۱۵۷۵۴/۸ ≈ ۱۵۷۵۵.)

ب) یک **دنبالهٔ هندسی** با جملهٔ اول ۱۶۵۸۴ و قدر نسبت ۰/۹۵ تشکیل می‌شود: t_n = 16584 × (0.95)^(n−1).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت